Una cota optima para la seleccion del maximo de una sequencia de observaciones.

Jose Angel Islas Anguiano

FCFM
Universidad Autonoma de Sinaloa

Noviembre 9 de 2016

Indice

Indice

1. Introduccion: El problema clasico de la secretaria.
2. Antecedentes: Seleccion del maximo $X_1, ..., X_n$.
    - $X_1, ..., X_n$ variables aleatorias continuas iid .

Indice

1. Introduccion: El problema clasico de la secretaria.
2. Antecedentes: Seleccion del maximo $X_1, ..., X_n$.
   - $X_1, ..., X_n$ variables aleatorias continuas iid .
3. $X_1, ..., X_n$ variables aleatorias independientes y continuas.
   - Una cota optima.

El problema clasico de la secretaria

Usted necesita contratar una secretaria de un grupo de n solicitantes.

- Los solicitantes pueden ser rankeados sin ambiguedad del mejor al peor.

El problema clasico de la secretaria

Usted necesita contratar una secretaria de un grupo de n solicitantes.

- Los solicitantes pueden ser rankeados sin ambiguedad del mejor al peor.
- Los solicitantes son entrevistados en forma secuencial en orden aleatorio, cada orden tiene la misma probabilidad de aparecer.

El problema clasico de la secretaria

Usted necesita contratar una secretaria de un grupo de n solicitantes.

- Los solicitantes pueden ser rankeados sin ambiguedad del mejor al peor.
- Los solicitantes son entrevistados en forma secuencial en orden aleatorio, cada orden tiene la misma probabilidad de aparecer.
- Inmediatamente despues de la entrevista usted debe decidir si acepta o rechaza.

Usted necesita contratar una secretaria de un grupo de n solicitantes.

- Los solicitantes pueden ser rankeados sin ambiguedad del mejor al peor.
- Los solicitantes son entrevistados en forma secuencial en orden aleatorio, cada orden tiene la misma probabilidad de aparecer.
- Inmediatamente despues de la entrevista usted debe decidir si acepta o rechaza.
- Aceptar o rechazar solo depende del ranking relativo.

El problema clasico de la secretaria

Usted necesita contratar una secretaria de un grupo de n solicitantes.

- Los solicitantes pueden ser rankeados sin ambiguedad del mejor al peor.
- Los solicitantes son entrevistados en forma secuencial en orden aleatorio, cada orden tiene la misma probabilidad de aparecer.
- Inmediatamente despues de la entrevista usted debe decidir si acepta o rechaza.
- Aceptar o rechazar solo depende del ranking relativo.
- Una vez rechazado el solicitante, ya no puede ser reconsiderado.

El problema clasico de la secretaria

Usted necesita contratar una secretaria de un grupo de n solicitantes.

- Los solicitantes pueden ser rankeados sin ambiguedad del mejor al peor.
- Los solicitantes son entrevistados en forma secuencial en orden aleatorio, cada orden tiene la misma probabilidad de aparecer.
- Inmediatamente despues de la entrevista usted debe decidir si acepta o rechaza.
- Aceptar o rechazar solo depende del ranking relativo.
- Una vez rechazado el solicitante, ya no puede ser reconsiderado.

Un solicitante con un ranking relativo 1 es llamado un candidato.

El problema clasico de la secretaria

Su objetivo es seleccionar a la mejor secretaria de todas.

- Que estrategia utilizara para maximizar la probabilidad de escoger a la mejor?

Su objetivo es seleccionar a la mejor secretaria de todas.

- Que estrategia utilizara para maximizar la probabilidad de escoger a la mejor?

Solucion

Encuentre

$$r^* = \min\{r \geq 1 : \sum_{k=r+1}^{n} \frac{1}{k-1} \leq 1\}.$$

Cuando n es grande, es optimo rechazar approximadamente n/e de los solicitantes e inmediatamente despues, seleccionar al primer candidato. La probabilidad optima de ganar es aproximadamente $1/e$!.

Definicion

Una regla de parada con respecto a la secuencia de variables aleatorias $X_1, X_2, ...$ es una variable aleatoria τ con valores en $(1, 2, ...)$ y la propiedad de que para t en $(1, 2, ...)$, la ocurrencia o no ocurrencia del evento $\tau = t$ depende solo de los valores $X_1, X_2, ..., X_t$.

Definition

Los problemas de parada optima estan definidos por dos objetos:

- (i) una secuencia de variables aleatorias, $X_1, X_2, ...$, cuya distribucion conjunta se asume es conocida

Definition

Los problemas de parada optima estan definidos por dos objetos:

- (i) una secuencia de variables aleatorias, $X_1, X_2, ...$, cuya distribucion conjunta se asume es conocida
- (ii) una secuencia de funciones de recompensa, $y_0, y_1(x_1), y_2(x_1, x_2), ..., y_\infty(x_1, x_2, ...)$

Definition

Los problemas de parada optima estan definidos por dos objetos:

- (i) una secuencia de variables aleatorias, $X_1, X_2, ...,$ cuya distribucion conjunta se asume es conocida
- (ii) una secuencia de funciones de recompensa, $y_0, y_1(x_1), y_2(x_1, x_2), ..., y_\infty(x_1, x_2, ...)$
- (iii) de (i) y (ii), si nos detenemos al tiempo k y si $X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_k = x_k$, entonces recibimos la recompensa $Y_k = y_k(x_1, x_2, ..., x_k)$.

Definition

Los problemas de parada optima estan definidos por dos objetos:

- (i) una secuencia de variables aleatorias, $X_1, X_2, ...,$ cuya distribucion conjunta se asume es conocida
- (ii) una secuencia de funciones de recompensa, $y_0, y_1(x_1), y_2(x_1, x_2), ..., y_\infty(x_1, x_2, ...)$
- (iii) de (i) y (ii), si nos detenemos al tiempo k y si $X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_k = x_k$, entonces recibimos la recompensa $Y_k = y_k(x_1, x_2, ..., x_k)$.

Cuando parar o continuar observando variables para maximizar la recompensa esperada o minimizar el costo esperado? Esto es, $E[Y_\tau]$.

Problemas de parada optima

Horizonte finito

Es necesario para despues de observar $X_1, X_2, ..., X_n$.

Problemas de parada optima

Horizonte finito

Es necesario para despues de observar $X_1, X_2, ..., X_n$.

Backward Induction

Usaremos backward induction para resolver este tipo de problemas.

Problema

El maximo de una secuencia

- (i) Sean $X_1, ..., X_n$ variables aleatorias independientes.

Problema

El maximo de una secuencia

- (i) Sean $X_1, ..., X_n$ variables aleatorias independientes.
- (ii) $M_n := \max(X_1, ..., X_n)$.

Problema

El maximo de una secuencia

- (i) Sean $X_1, ..., X_n$ variables aleatorias independientes.
- (ii) $M_n := \max(X_1, ..., X_n)$.

Problema

Suponga que queremos maximizar la probabilidad de escoger el valor maximo de la secuencia, esto es, $P(X_\tau = M_n)$. Cual es la estrategia optima τ?

Antecedentes

- $X_1, ..., X_n$ continuas iid.

- $X_1, ..., X_n$ continuas iid.
- Para $1 \leq i \leq n$, let $M_i = \max\{X_1, ..., X_i\}$.

Criterio de parada optima

Gilbert y Mosteller (1966) examinaron este problema.

- $X_1, ..., X_n$ continuas iid.
- Para $1 \leq i \leq n$, let $M_i = \max\{X_1, ..., X_i\}$.

Criterio de parada optima

Gilbert y Mosteller (1966) examinaron este problema.

1. Sea F la funcion de distribucion de X_i.

- $X_1, ..., X_n$ continuas iid.
- Para $1 \leq i \leq n$, let $M_i = \max\{X_1, ..., X_i\}$.

Criterio de parada optima

Gilbert y Mosteller (1966) examinaron este problema.

1. Sea F la funcion de distribucion de X_i.
2. Una observacion X_i es llamada candidata si, $X_i = M_i$.

- $X_1, ..., X_n$ continuas iid.
- Para $1 \leq i \leq n$, let $M_i = \max\{X_1, ..., X_i\}$.

Criterio de parada optima

Gilbert y Mosteller (1966) examinaron este problema.

1. Sea F la funcion de distribucion de X_i.
2. Una observacion X_i es llamada candidata si, $X_i = M_i$.
3. Para cada i, existe un numero decisivo d_i, tal que si X_i es un candidato y $F(X_i) \geq d_i$ entonces es optimo parar en i.

Para cualquier variables aleatoria continua X

$$v^*_{n,max} := \sup_{\tau \in S} P\left(X_\tau = M_n\right)$$

S es el conjunto de todos los criterios de parada.

Table: (Gilbert y Mosteller)

n	$v^*_{n,max}$	n	$v^*_{n,max}$
1	1.0000	10	.608699
2	.750000	15	.598980
3	.684293	20	.594200
4	.655396	30	.589472
5	.639194	40	.587126
		50	.585725
		∞	.580164

Para cualquier variables aleatoria continua X

$$v^*_{n,max} := \sup_{\tau \in S} P\left(X_\tau = M_n\right)$$

S es el conjunto de todos los criterios de parada.

Table: (Gilbert y Mosteller)

n	$v^*_{n,max}$	n	$v^*_{n,max}$
1	1.0000	10	.608699
2	.750000	15	.598980
3	.684293	20	.594200
4	.655396	30	.589472
5	.639194	40	.587126
		50	.585725
		∞	.580164

La probabilidad de ganar no depende de la distribucion de X mientras esta sea continua.

Una cota optima

- Suponga $X_1, ..., X_n$ variables aleatorias independientes y continuas.

Sea $V_n^*(X_1, ..., X_n)$ la probabilidad optima de ganar para seleccionar el maximo de la secuencia,

$$V_n^*(X_1, ..., X_n) = \sup_{1 \leq \tau \leq n} P(X_\tau = M_n). \tag{1}$$

- Suponga $X_1, ..., X_n$ variables aleatorias independientes y continuas.

Sea $V_n^*(X_1, ..., X_n)$ la probabilidad optima de ganar para seleccionar el maximo de la secuencia,

$$V_n^*(X_1, ..., X_n) = \sup_{1 \leq \tau \leq n} P(X_\tau = M_n). \quad (1)$$

Theorem

Dada una secuencia finita de $n > 1$ variables aletorias continuas independientes $X_1, ..., X_n$,

$$V_n^*(X_1, ..., X_n) \geq (1 - 1/n)^{n-1}$$

y esta cota es alcanzada.

Ingredientes de la prueba

Theorem (Sum the odds theorem (Bruss 2000))

Sea $I_1, I_2, ..., I_n$ *una secuencia independiente de variables aleatorias indicadoras con* $p_j = E(I_j)$. *Sean* $q_j = 1 - p_j$ *y* $r_j = p_j/q_j$. *Entonces una regla de parada optima* τ_n *que maximiza la probabilidad de pararse en el ultimo exito existe y esta es pararse en el primer indice (si existe)* k *con* $I_k = 1$ *y* $k \geq s$, *donde*

$$s = \sup\left\{1, \max\left\{1 \leq k \leq n : \sum_{j=k}^{n} r_j \geq 1\right\}\right\},$$

con $\sup\{\emptyset\} := -\infty$. *La recompensa optima (probabilidad de ganar) esta dada por*

$$V = V(p_1, ..., p_n) = \prod_{j=s}^{n} q_j \sum_{k=s}^{n} r_k.$$

Recuerde: $r_j = p_j/(1-p_j)$.

Theorem (Bruss (2003))

Si $\sum_{k=1}^{n} r_k \geq 1$, *entonces* $V \geq 1/e$.

Recuerde: $r_j = p_j/(1 - p_j)$.

Theorem (Bruss (2003))

Si $\sum_{k=1}^{n} r_k \geq 1$, *entonces* $V \geq 1/e$.

$1/e$ es la mejor cota inferior uniforme.

Cotas

Recuerde: $r_j = p_j/(1-p_j)$.

Theorem (Bruss (2003))

Si $\sum_{k=1}^{n} r_k \geq 1$, *entonces* $V \geq 1/e$.

$1/e$ es la mejor cota inferior uniforme.

Pero, esta cota puede ser mejorada

Theorem (Cota inferior)

Si $\sum_{k=1}^{n} r_k \geq 1$, *entonces* $V \geq \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n$.

Secuencia V

Definition

Sea $X_1 :\equiv a_1$ y para $1 < i \leq n$

$$X_i := \begin{cases} a_i, & \text{con probabilidad } p_i, \\ b_i, & \text{con probabilidad } q_i := 1 - p_i, \end{cases}$$

donde $a_1 < a_2 < ... < a_n$ y $a_1 > b_2 > b_3 > ... > b_n$. La secuencia $X_1, ..., X_n$ es llamada *secuencia V*.

Secuencia V

Definition

Sea $X_1 :\equiv a_1$ y para $1 < i \leq n$

$$X_i := \begin{cases} a_i, & \text{con probabilidad } p_i, \\ b_i, & \text{con probabilidad } q_i := 1 - p_i, \end{cases}$$

donde $a_1 < a_2 < ... < a_n$ y $a_1 > b_2 > b_3 > ... > b_n$. La secuencia $X_1, ..., X_n$ es llamada *secuencia V*.

Lemma (Una Cota)

Si $X_1, ..., X_n$ es una secuencia V, entonces

$$V_n^*(X_1, ..., X_n) \geq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}.$$

La cota es obtenida, considere $p_i = \frac{1}{n}$, $q_i := \frac{n-1}{n}$, $i = 2, ..., n$.

Sean
$U_1(a_1) :=$ probabilidad de ganar si paramos en la obs 1.
$W_1(a_1) :=$ probabilidad de ganar si continuamos en la obs 1
y utilizamos la estrategia optima de ahi en adelante.

Sean
$U_1(a_1) :=$ probabilidad de ganar si paramos en la obs 1.
$W_1(a_1) :=$ probabilidad de ganar si continuamos en la obs 1
y utilizamos la estrategia optima de ahi en adelante.

$$V_n^*(X_1, \ldots, X_n) = \max\{U_1(a_1), W_1(a_1)\}$$

Bosquejo de la prueba

Sean
$U_1(a_1) :=$ probabilidad de ganar si paramos en la obs 1.
$W_1(a_1) :=$ probabilidad de ganar si continuamos en la obs 1
y utilizamos la estrategia optima de ahi en adelante.

$$V_n^*(X_1, \ldots, X_n) = \max\{U_1(a_1), W_1(a_1)\}$$

Para $k = 1, \ldots, n-1$ definimos las variables aleatorias indicadoras

$$I_k := \begin{cases} 1 & \text{si } X_{k+1} > \max\{X_1, \ldots, X_k\} \\ 0 & \text{otro} \end{cases}$$

$p_k = E(I_k) = P(X_{k+1} = a_{k+1})$, $q_k = 1 - p_k$ y $r_k = \frac{q_k}{p_k}$.

Bosquejo de la prueba

Si decidimos continuar en la primera observacion y usar la estrategia optima de ahi en adelante, ganaremos si y solo si escogemos el ultimo exito en la secuencia $I_1, \ldots, I_{n-1}$. La cual es independiente pues para cada $k \geq 1$, $I_k = 1$ si y solo si$X_{k+1} = a_{k+1}$.

Bosquejo de la prueba

Si decidimos continuar en la primera observacion y usar la estrategia optima de ahi en adelante, ganaremos si y solo si escogemos el ultimo exito en la secuencia $I_1, \ldots, I_{n-1}$. La cual es independiente pues para cada $k \geq 1$, $I_k = 1$ si y solo si$X_{k+1} = a_{k+1}$.

Usando el teorema sum the odds y el teorema de la cota inferior, si $\sum_{k=1}^{n-1} r_k \geq 1$, entonces

$$W_1(a_1) = V(p_1, \ldots, p_{n-1}) \geq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}.$$

Bosquejo de la prueba

Si decidimos continuar en la primera observacion y usar la estrategia optima de ahi en adelante, ganaremos si y solo si escogemos el ultimo exito en la secuencia $I_1, \ldots, I_{n-1}$. La cual es independiente pues para cada $k \geq 1$, $I_k = 1$ si y solo si$X_{k+1} = a_{k+1}$.

Usando el teorema sum the odds y el teorema de la cota inferior, si $\sum_{k=1}^{n-1} r_k \geq 1$, entonces

$$W_1(a_1) = V(p_1, \ldots, p_{n-1}) \geq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}.$$

Si $\sum_{k=1}^{n-1} r_k \leq 1$, parando en la primera observacion obtenemos

$$\begin{aligned} U_1(a_1) &= q_1 \cdots q_{n-1} \\ &= \prod_{i=1}^{n-1} (1 + r_i)^{-1}. \end{aligned}$$

donde $1/q_i = 1 + r_i$.

Bosquejo de la prueba

Maximizando $\prod_{i=1}^{n-1}(1+r_i)$, bajo la restriccion $\sum_{k=1}^{n-1} r_k \leq 1$.

Utiliza la desigualdad media aritmetica geometrica tenemos

$$\left(\prod_{i=1}^{n-1}(1+r_i)\right)^{\frac{1}{n-1}} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n-1}(1+r_k)}{n-1} \leq \frac{(n-1)+1}{n-1} = \frac{n}{n-1},$$

Bosquejo de la prueba

Maximizando $\prod_{i=1}^{n-1}(1+r_i)$, bajo la restriccion $\sum_{k=1}^{n-1} r_k \leq 1$.

Utiliza la desigualdad media aritmetica geometrica tenemos

$$\left(\prod_{i=1}^{n-1}(1+r_i)\right)^{\frac{1}{n-1}} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n-1}(1+r_k)}{n-1} \leq \frac{(n-1)+1}{n-1} = \frac{n}{n-1},$$

la igualdad se obtiene cuando $r_i = \frac{1}{n-1}$, $i = 1, \ldots, n-1$ asi $1 + r_i = \frac{n}{n-1}$. De aqui que, $U_1(a_1) \geq \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}$.

Bosquejo de la prueba

Maximizando $\prod_{i=1}^{n-1}(1+r_i)$, bajo la restriccion $\sum_{k=1}^{n-1} r_k \leq 1$.

Utiliza la desigualdad media aritmetica geometrica tenemos

$$\left(\prod_{i=1}^{n-1}(1+r_i)\right)^{\frac{1}{n-1}} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n-1}(1+r_k)}{n-1} \leq \frac{(n-1)+1}{n-1} = \frac{n}{n-1},$$

la igualdad se obtiene cuando $r_i = \frac{1}{n-1}$, $i = 1, \ldots, n-1$ asi $1 + r_i = \frac{n}{n-1}$. De aqui que, $U_1(a_1) \geq \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}$.

$$V_n^*(X_1, \ldots, X_n) \geq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}.$$

Maximizando $\prod_{i=1}^{n-1}(1+r_i)$, bajo la restriccion $\sum_{k=1}^{n-1} r_k \leq 1$.

Utiliza la desigualdad media aritmetica geometrica tenemos

$$\left(\prod_{i=1}^{n-1}(1+r_i)\right)^{\frac{1}{n-1}} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n-1}(1+r_k)}{n-1} \leq \frac{(n-1)+1}{n-1} = \frac{n}{n-1},$$

la igualdad se obtiene cuando $r_i = \frac{1}{n-1}$, $i = 1, \ldots, n-1$ asi $1 + r_i = \frac{n}{n-1}$. De aqui que, $U_1(a_1) \geq \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}$.

$$V_n^*(X_1, \ldots, X_n) \geq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}.$$

La cota es alcanzada: sea $p_i = \frac{1}{n}$, $q_i = \frac{n-1}{n}$ y $r_i = \frac{q_i}{p_i}$
$i = 1, \ldots, n-1$

Ejemplo

En general, no podemos utilizar el teorema sum the odds para cualquier secuencia independiente $X_1, ..., X_n$.

Ejemplo

En general, no podemos utilizar el teorema sum the odds para cualquier secuencia independiente $X_1, ..., X_n$.

Example

Considere $X_1 \sim Bernoulli(1/2)$, $X_2 \sim Uniforme(0, 1)$ y

$$X_3 := \begin{cases} 1, & \text{con probabilidad } 1/3, \\ 1/2, & \text{con probabilidad } 1/3, \\ 0, & \text{con probabilidad } 1/3. \end{cases}$$

Para $i = 1, 2$, sea

$$I_i := \begin{cases} 1 & \text{si } X_{i+1} > \max\{X_1, ..., X_i\} \\ 0 & \text{otro.} \end{cases}$$

Tenemos que $P(I_1 = 0)P(I_2 = 1) = \frac{5}{24}$. Mientras $P(\{I_1 = 0, I_2 = 1\}) = \frac{1}{6}$.

Lemma (Reduccion)

Existe una secuencia V, $X_1^{'}, ..., X_n^{'}$, *tal que*

$$V_n^*(X_1, ..., X_n) \geq V_n^*(X_1^{'}, ..., X_n^{'})$$

.

Una cota optima

Theorem

Dada una secuencia finita de $n > 1$ variables aleatorias continuas independientes $X_1, ..., X_n$,

$$V_n^*(X_1, ..., X_n) \geq (1 - 1/n)^{n-1}$$

y la cota es alcanzada.

Theorem

Dada una secuencia finita de $n > 1$ variables aleatorias continuas independientes $X_1, ..., X_n$,

$$V_n^*(X_1, ..., X_n) \geq (1 - 1/n)^{n-1}$$

y la cota es alcanzada.

Bosquejo de la prueba.
La desigualdad es una consecuencia inmediata del Lema de Reduccion y el Lema Una Cota. La cota es alcanzada reemplazando la secuencia V que alcanza la cota en el Lema de Una Cota con otra secuencia con distribuciones continuas, como sigue.

Bosquejo de la prueba

La cota es alcanzada.

Ejemplo

Recuerde la V-sequence con $a_1 < a_2 < ... < a_n$ y $a_1 > b_2 > b_3 > ... > b_n$. Para $i = 1, 2, ..., n$, sea

$$f_i(x) := \begin{cases} \frac{1}{2n\epsilon}, & \text{si } a_i - \epsilon \leq x \leq a_i + \epsilon \\ \frac{n-1}{2n\epsilon}, & \text{si } b_i - \epsilon \leq x \leq b_i + \epsilon \\ 0, & \text{otra} \end{cases}$$

Donde escogemos $\epsilon > 0$ tal que el soporte de $f_1, ..., f_n$ no se superposicionen. De esta manera la probabilidad optima de ganar es la misma que en el Lema Una Cota.

Link

- A sharp bound for choosing the maximum of an independent sequence, preprint at arxiv.org/abs/1511.02211 (with P. Allaart). Journal of Applied Probability Vol. 53 No.4 (December 2016).

References

J. Gilbert and F. Mosteller (1966).
Recognizing the maximum of a sequence.
J. Amer. Statist. Assoc. **61**, 35–73.

T. P. Hill and R. P. Kertz (1992).
A survey of prophet inequalities in optimal stopping theory.
Strategies for Sequential Search and Selection in Real Time, Contemporary Mathematics **125**, 191–207.

F. T. Bruss (2003).
A note on bounds for the odds theorem of optimal stopping
The Annals of Probability **31**, 1859–1861.
Institute of Mathematical Statistics.

F. T. Bruss (2000).
Sum the odds to one and stop
The Annals of Probability **28**, 1384–1391.