Una cota optima para la seleccion del maximo de una secuencia

Jose Angel Islas Anguiano

FCFM
Universidad Autonoma de Sinaloa

27 de octubre de 2016

Indice

Indice

Indice

El problema clasico de la secretaria

Usted necesita contratar una secretaria de un grupo de n solicitantes.

El problema clasico de la secretaria

Usted necesita contratar una secretaria de un grupo de n solicitantes.

- Los solicitantes pueden ser rankeados sin ambiguedad del mejor al peor.

El problema clasico de la secretaria

Usted necesita contratar una secretaria de un grupo de n solicitantes.

- Los solicitantes pueden ser rankeados sin ambiguedad del mejor al peor.
- Los solicitantes son entrevistados en forma secuencial. Con una de las $n!$ differentes permutaciones igualmente probable de aparecer.

El problema clasico de la secretaria

Usted necesita contratar una secretaria de un grupo de n solicitantes.

- Los solicitantes pueden ser rankeados sin ambiguedad del mejor al peor.
- Los solicitantes son entrevistados en forma secuencial. Con una de las $n!$ differentes permutaciones igualmente probable de aparecer.
- Inmediatamente despues de la entrevista usted debe decidir si acepta o rechaza.

El problema clasico de la secretaria

Usted necesita contratar una secretaria de un grupo de n solicitantes.

- Los solicitantes pueden ser rankeados sin ambiguedad del mejor al peor.
- Los solicitantes son entrevistados en forma secuencial. Con una de las $n!$ differentes permutaciones igualmente probable de aparecer.
- Inmediatamente despues de la entrevista usted debe decidir si acepta o rechaza.
- Aceptar o rechazar solo depende del ranking relativo.

El problema clasico de la secretaria

Usted necesita contratar una secretaria de un grupo de n solicitantes.

- Los solicitantes pueden ser rankeados sin ambiguedad del mejor al peor.
- Los solicitantes son entrevistados en forma secuencial. Con una de las $n!$ differentes permutaciones igualmente probable de aparecer.
- Inmediatamente despues de la entrevista usted debe decidir si acepta o rechaza.
- Aceptar o rechazar solo depende del ranking relativo.
- Una vez rechazado el solicitante, ya no puede ser reconsiderado.

Usted necesita contratar una secretaria de un grupo de n solicitantes.

- Los solicitantes pueden ser rankeados sin ambiguedad del mejor al peor.
- Los solicitantes son entrevistados en forma secuencial. Con una de las $n!$ differentes permutaciones igualmente probable de aparecer.
- Inmediatamente despues de la entrevista usted debe decidir si acepta o rechaza.
- Aceptar o rechazar solo depende del ranking relativo.
- Una vez rechazado el solicitante, ya no puede ser reconsiderado.

Un solicitante con un ranking relativo 1 es llamado un candidato.

El problema clasico de la secretaria

Su objetivo es seleccionar a la mejor secretaria de todas.

- Que estrategia utilizara para maximizar la probabilidad de escoger a la mejor?

El problema clasico de la secretaria

Su objetivo es seleccionar a la mejor secretaria de todas.

- Que estrategia utilizara para maximizar la probabilidad de escoger a la mejor?

Solucion

Dado n, encuentre

$$r^* = \min\{r \geq 1 : \sum_{k=r+1}^{n} \frac{1}{k-1} \leq 1\}.$$

Su objetivo es seleccionar a la mejor secretaria de todas.

- Que estrategia utilizara para maximizar la probabilidad de escoger a la mejor?

Solucion

Dado n, encuentre

$$r^* = \min\{r \geq 1 : \sum_{k=r+1}^{n} \frac{1}{k-1} \leq 1\}.$$

Esto es, rechaze las primeras $r^* - 1$ solicitudes y acepte la primer candidata.

Probabilidad de ganar

Table:

$n =$	1	2	3	4	5	6	7	8
$r^* =$	1	1	2	2	3	3	3	4
$P_{r^*} =$	1	.5	.5	.458	.433	.428	.414	.410

Figure: Solicitante 1

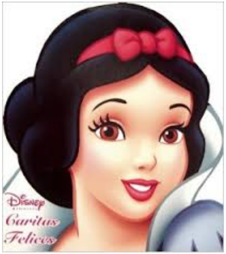

Figure: Solicitante 2

n=7, r=3

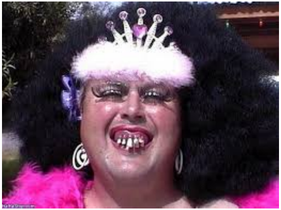

Figure: Solicitante 3

n=7, r=3

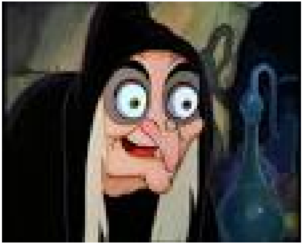

Figure: Solicitante 4

$n=7$, $r=3$

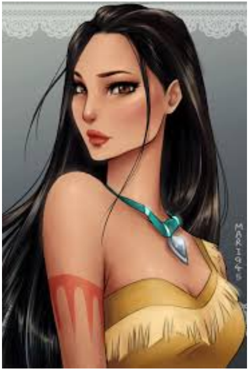

Figure: Solicitante 5

Table:

$n =$	1	2	3	4	5	6	7	8
$r^* =$	1	1	2	2	3	3	3	4
$P_{r^*} =$	1	.5	0.5	.458	.433	.428	.414	.410

Probabilidad de ganar

Table:

$n =$	1	2	3	4	5	6	7	8
$r^* =$	1	1	2	2	3	3	3	4
$P_{r^*} =$	1	.5	0.5	.458	.433	.428	.414	.410

Cuando n es grande, es optimo rechazar aproximadamente n/e de los aplicantes e inmediatamente despues, seleccionar al primer candidato(a). La probabilidad optima de ganar es $1/e$.

Otros nombres

- Googol
- Marriage problem

Hannah Fry: Las matematicas del amor (Ted talk)

Problema

El maximo de una secuencia

- (i) Sean $X_1, ..., X_n$ variables aleatorias independientes.

Problema

El maximo de una secuencia

- (i) Sean $X_1, ..., X_n$ variables aleatorias independientes.
- (ii) $M_n := \max(X_1, ..., X_n)$.

El maximo de una secuencia

- (i) Sean $X_1, ..., X_n$ variables aleatorias independientes.
- (ii) $M_n := \max(X_1, ..., X_n)$.

Problem

Suponga que queremos maximizar la probabilidad de escoger el valor maximo de la secuencia, esto es, $P(X_\tau = M_n)$. Cual es la estrategia optima τ?

Antecedentes

- $X_1, ..., X_n$ continuas iid.

Antecedentes

- $X_1, ..., X_n$ continuas iid.
- Para $1 \leq i \leq n$, sea $M_i = \max\{X_1, ..., X_i\}$.

Solucion

Gilbert y Mosteller (1966) examinaron este problema.

Antecedentes

- $X_1, ..., X_n$ continuas iid.
- Para $1 \leq i \leq n$, sea $M_i = \max\{X_1, ..., X_i\}$.

Solucion

Gilbert y Mosteller (1966) examinaron este problema.

1. Sea F la funcion de distribucion de X_i.

Antecedentes

- $X_1, ..., X_n$ continuas iid.
- Para $1 \leq i \leq n$, sea $M_i = \max\{X_1, ..., X_i\}$.

Solucion

Gilbert y Mosteller (1966) examinaron este problema.

1. Sea F la funcion de distribucion de X_i.
2. Una observacion X_i es llamada candidata si, $X_i = M_i$.

Antecedentes

- $X_1, ..., X_n$ continuas iid.
- Para $1 \leq i \leq n$, sea $M_i = \max\{X_1, ..., X_i\}$.

Solucion

Gilbert y Mosteller (1966) examinaron este problema.

1. Sea F la funcion de distribucion de X_i.
2. Una observacion X_i es llamada candidata si, $X_i = M_i$.
3. Para cada i, existe un numero decisivo d_i, tal que si X_i es un candidato y $F(X_i) \geq d_i$ entonces es optimo parar en i.

Max

Para cualquier variable aleatoria continua X

$$v^*_{n,max} := \sup_{\tau \in S} P\left(X_\tau = M_n\right)$$

Table: (Gilbert y Mosteller)

n	$v^*_{n,max}$	n	$v^*_{n,max}$
1	1.0000	10	.608699
2	.750000	15	.598980
3	.684293	20	.594200
4	.655396	30	.589472
5	.639194	40	.587126
		50	.585725
		∞	.580164

La probabilidad de ganar no depende de la distribucion de X mientras esta sea continua.

Problema

$X_1, ..., X_n$

- Independientes
- Continuas
- Orden

Problema

$X_1, ..., X_n$

- Independientes
- Continuas
- Orden

$$X_1 \sim Uniforme(a, b)$$

a b

Problema

$X_1, ..., X_n$

- Independientes
- Continuas
- Orden

$$X_1 \sim Uniforme(a, b)$$

a b

$$X_2 \sim Uniforme(a, c)$$

a c

Problema

$X_1, ..., X_n$

- Independientes
- Continuas
- Orden

$X_1 \sim Uniforme(a, b)$

a b

$X_2 \sim Uniforme(a, c)$

a c

$X_3 \sim Uniforme(d, f)$

d f

Resultado

Theorem

Dada una secuencia finita de $n > 1$ *variables aletorias continuas independientes* $X_1, ..., X_n$, $V_n^*(X_1, ..., X_n) \geq (1 - 1/n)^{n-1}$ *y la cota es optima.*

References

P. Allaart and J. Islas (Diciembre 2016).
A sharp lower bound for choosing the maximum of an independent sequence.
J. App. Prob. (Por aparecer)

J. Gilbert and F. Mosteller (1966).
Recognizing the maximum of a sequence.
J. Amer. Statist. Assoc. **61**, 35–73.

T. P. Hill and R. P. Kertz (1992).
A survey of prophet inequalities in optimal stopping theory.
Strategies for Sequential Search and Selection in Real Time, Contemporary Mathematics **125**, 191–207.

T. Fergusson (1989). Who solved the secretary problem?
Hannah Fry: Las matemticas del amor (Ted talk)