Criterio de parada cerca de la cima de una caminata aleatoria

José Ángel Islas Anguiano

FCFM
Universidad Autonoma de Sinaloa

23 de Octubre de 2017

Índice

Regla de parada

Definición

Una regla de parada con respecto a una secuencia de variables aleatorias $X_1, X_2, ...$ es una variable aleatoria τ con valores en (1,2,...) y la propiedad de que para cada t en (1,2,...), la ocurrencia o no ocurrencia del evento $\tau = t$ depende solo de los valores $X_1, X_2, ..., X_t$.

Problemas de parada óptima

Definición. Problemas de parada óptima

Los problemas de parada óptima están definidos por dos objetos:

- (i) una secuencia de variables aleatorias, $X_1, X_2, ...$, cuya distribution conjunta se conoce

Definición. Problemas de parada óptima

Los problemas de parada óptima están definidos por dos objetos:

- (i) una secuencia de variables aleatorias, $X_1, X_2, \ldots$, cuya distribution conjunta se conoce
- (ii) una secuenca de funciones de recompensa de valores reales,
  $y_0, y_1(x_1), y_2(x_1, x_2), \ldots, y_\infty(x_1, x_2, \ldots)$

Problemas de parada óptima

Definición. Problemas de parada óptima

Los problemas de parada óptima están definidos por dos objetos:

- (i) una secuencia de variables aleatorias, $X_1, X_2, ...,$ cuya distribution conjunta se conoce
- (ii) una secuenca de funciones de recompensa de valores reales,
  $y_0, y_1(x_1), y_2(x_1, x_2), ..., y_\infty(x_1, x_2, ...)$
- (iii) De (i) y (ii), si nos detenemos en el tiempo k y si $X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_k = x_k$, entonces recibimos la recompensa $Y_k = y_k(x_1, x_2, ..., x_k)$

Definición. Problemas de parada óptima

Los problemas de parada óptima están definidos por dos objetos:

- (i) una secuencia de variables aleatorias, $X_1, X_2, ...,$ cuya distribution conjunta se conoce
- (ii) una secuenca de funciones de recompensa de valores reales,
  $y_0, y_1(x_1), y_2(x_1, x_2), ..., y_\infty(x_1, x_2, ...)$
- (iii) De (i) y (ii), si nos detenemos en el tiempo k y si $X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_k = x_k$, entonces recibimos la recompensa $Y_k = y_k(x_1, x_2, ..., x_k)$

Cuando pararse o continuar observando las variables aleatorias para maximizar el valor esperado de la recomensa o minimizar el costo esperado?, Esto es $E[Y_\tau]$

Problemas de horizonte finito

Horizonte finito

Es necesario parar despues de observar $X_1, X_2, ..., X_N$

Problemas de horizonte finito

Horizonte finito

Es necesario parar despues de observar $X_1, X_2, ..., X_N$

Inducción para atrás (Backward Induction)

Se utiliza Inducción para atrás para resolver este tipo de problemas.

Planteamiento del problema

Caminata aleatoria

- (i) Sean $X_1, X_2, ..., X_N$ iid Bernoulli(p) , esto es

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{con probabilidad } p \\ -1, & \text{con probabilidad } 1-p. \end{cases}$$

Planteamiento del problema

Caminata aleatoria

- (i) Sean $X_1, X_2, ..., X_N$ iid Bernoulli(p) , esto es

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{con probabilidad } p \\ -1, & \text{con probabilidad } 1-p. \end{cases}$$

- (ii) Considere $S_0 := 0$, $S_n := X_1 + X_2 + ... + X_n$ para $n \leq N$ y

Caminata aleatoria

- (i) Sean $X_1, X_2, ..., X_N$ iid Bernoulli(p) , esto es

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{con probabilidad } p \\ -1, & \text{con probabilidad } 1-p. \end{cases}$$

- (ii) Considere $S_0 := 0$, $S_n := X_1 + X_2 + ... + X_n$ para $n \leq N$ y
- (iii) $M_N := \max(S_0, S_1, ...S_N)$

Problema

Suponga que se desea maximizar la probabilidad de "deterse en la cima" de la caminata aleatoria, esto es, $P(S_\tau = M_N)$. Cuál es la regla de parada óptima τ?

Antecedentes

Problema

Suponga que se desea maximizar la probabilidad de "deterse en la cima" de la caminata aleatoria, esto es, $P(S_\tau = M_N)$. Cuál es la regla de parada óptima τ?

Fue resuelto por Hlynka and Sheahan (1988) para el caso $p = \frac{1}{2}$. Recientemente Yam et al. (2009) dieron una solución general.

Antecedentes

Problema

Suponga que se desea maximizar la probabilidad de "deterse en la cima" de la caminata aleatoria, esto es, $P(S_\tau = M_N)$. Cuál es la regla de parada óptima τ?

Fue resuelto por Hlynka and Sheahan (1988) para el caso $p = \frac{1}{2}$. Recientemente Yam et al. (2009) dieron una solución general.

1. Si $p > \frac{1}{2}$, $\tau = N$ es la única regla de párada óptima

Antecedentes

Problema

Suponga que se desea maximizar la probabilidad de "deterse en la cima" de la caminata aleatoria, esto es, $P(S_\tau = M_N)$. Cuál es la regla de parada óptima τ?

Fue resuelto por Hlynka and Sheahan (1988) para el caso $p = \frac{1}{2}$. Recientemente Yam et al. (2009) dieron una solución general.

1. Si $p > \frac{1}{2}$, $\tau = N$ es la única regla de párada óptima
2. Si $p < \frac{1}{2}$, $\tau = 0$ es la única regla de párada óptima

Problema

Suponga que se desea maximizar la probabilidad de "deterse en la cima" de la caminata aleatoria, esto es, $P(S_\tau = M_N)$. Cuál es la regla de parada óptima τ?

Fue resuelto por Hlynka and Sheahan (1988) para el caso $p = \frac{1}{2}$. Recientemente Yam et al. (2009) dieron una solución general.

1. Si $p > \frac{1}{2}$, $\tau = N$ es la única regla de párada óptima
2. Si $p < \frac{1}{2}$, $\tau = 0$ es la única regla de párada óptima
3. Si $p = \frac{1}{2}$, cualquier regla τ tal que $P(S_\tau = M_\tau \text{ o } \tau = N) = 1$ es óptima

Criterio de parada cerca de la cima

Problema

Dado $N > 0$, encuentre una regla de parada $\tau \leq N$ tal que maximize

$$P(M_N - S_\tau \leq 1).$$

(Gana si se detiene en uno de los dos valores mas altos)

Exploración

Definición

Diremos que estamos en el estado (n, i) si:

1. Faltan n pasos hasta el final N;
2. La caminata esta i unidades por debajo del máximo actual.

Definición

Diremos que estamos en el estado (n, i) si:

1. Faltan n pasos hasta el final N;
2. La caminata esta i unidades por debajo del máximo actual.

Obviamente, es óptimo continuar en los estados $(n, 2)$, $(n, 3), \ldots$

Exploración

Definición

Diremos que estamos en el estado (n, i) si:

1. Faltan n pasos hasta el final N;
2. La caminata esta i unidades por debajo del máximo actual.

Obviamente, es óptimo continuar en los estados $(n, 2)$, $(n, 3), \ldots$

Lema (Allaart)

En el estado $(n, 0)$ con $n \geq 1$, también es óptimo continuar.

No es tan difícil – detenerse despues de el siguiente paso (ya sea para arriba o abajo) es al menos tan bueno como detenerse ahora.

Exploración

Definición

Diremos que estamos en el estado (n, i) si:

1. Faltan n pasos hasta el final N;
2. La caminata esta i unidades por debajo del máximo actual.

Obviamente, es óptimo continuar en los estados $(n, 2)$, $(n, 3), \ldots$

Lema (Allaart)

En el estado $(n, 0)$ con $n \geq 1$, también es óptimo continuar.

No es tan difícil – detenerse despues de el siguiente paso (ya sea para arriba o abajo) es al menos tan bueno como detenerse ahora.

Conclusión

Los estados críticos son $(n, 1)$, para $n = 1, 2, \ldots$.

Lema (Allaart)

Para cada $n \geq 1$, existe $0 < p_n \leq 1$ tal que , en el estado $(n, 1)$, es óptimo

- parar si $p \leq p_n$;
- continuar si $p \geq p_n$.

Exploración

Lema (Allaart)

Para cada $n \geq 1$, existe $0 < p_n \leq 1$ tal que , en el estado $(n, 1)$, es óptimo

- parar si $p \leq p_n$;
- continuar si $p \geq p_n$.

Nota

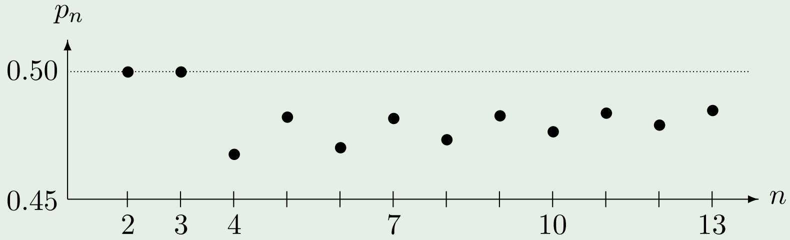
Los p_n son calculados usando inducción para atrás.

Table: Valores críticos p_n

n	p_n	n	p_n
1	1	11	.48452
2	0.5	12	.47984
3	0.5	13	.48543
4	.46898	14	.48175
5	.48288	15	.48624
6	.47144	16	.48330
7	.48268	17	.48697
8	.47470	18	.48453
9	.48357	19	.48760
10	.47752	20	.48554

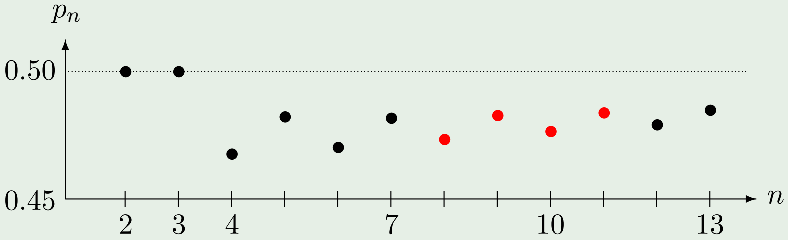
Gráfica y conjeturas

Gráfica de la probabilidades críticas



Gráfica y conjeturas

Gráfica de la probabilidades críticas

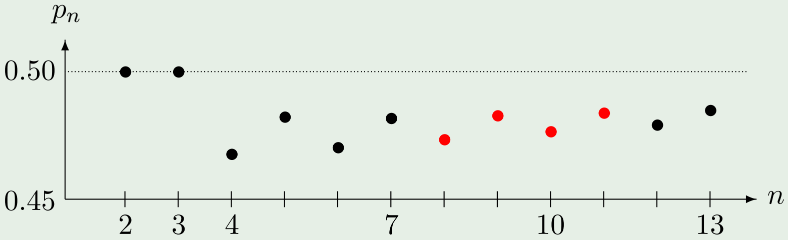


La gráfica sugiere:

1. $p_n < 0.5$ para todo $n \geq 4$
2. $\lim_{n\to\infty} p_n = 0.5$
3. $p_{2n-2} < p_{2n} < p_{2n-1} < p_{2n+1}$, para todo $n \geq 4$,

Gráfica y conjeturas

Gráfica de la probabilidades críticas



La gráfica sugiere:

1. $p_n < 0.5$ para todo $n \geq 4$
2. $\lim_{n\to\infty} p_n = 0.5$
3. $p_{2n-2} < p_{2n} < p_{2n-1} < p_{2n+1}$, para todo $n \geq 4$,

Propiedades de la sucesión

Teorema (Allaart)

1. $p_n < 0.5$ para todo $n \geq 4$

Propiedades de la sucesión

Teorema (Allaart)

1. $p_n < 0.5$ para todo $n \geq 4$
2. $\limsup_{n\to\infty} p_n = 0.5$

Propiedades de la sucesión

Teorema (Allaart)

1. $p_n < 0.5$ para todo $n \geq 4$
2. $\limsup_{n\to\infty} p_n = 0.5$
3. $p_{2n} < p_{2n-1} < p_{2n+1}$ para todo $n \geq 4$,

Propiedades de la sucesión

Teorema (Allaart)

1. $p_n < 0.5$ para todo $n \geq 4$
2. $\limsup_{n\to\infty} p_n = 0.5$
3. $p_{2n} < p_{2n-1} < p_{2n+1}$ para todo $n \geq 4$,

Conjecturas acerca de p_n (Allaart)

i) $\lim_{n\to\infty} p_n = 0.5$.
ii) $p_{2n} \leq p_{2n+2}$ para todo $n \geq 2$.

Nuevos resultados

Teorema

1. $p_n \geq p_4$ para $n \geq 1$

Nuevos resultados

Teorema

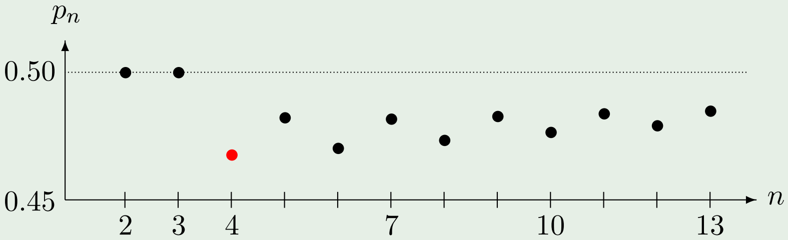
1. $p_n \geq p_4$ para $n \geq 1$
2. $p_{2n+4} \leq p_{2n+1}$ para todo $n \geq 0$.

Nuevos resultados

Teorema

1. $p_n \geq p_4$ para $n \geq 1$
2. $p_{2n+4} \leq p_{2n+1}$ para todo $n \geq 0$.
3. $p_{2n+6} \leq p_{2n+1}$ para todo $n \geq 3$.

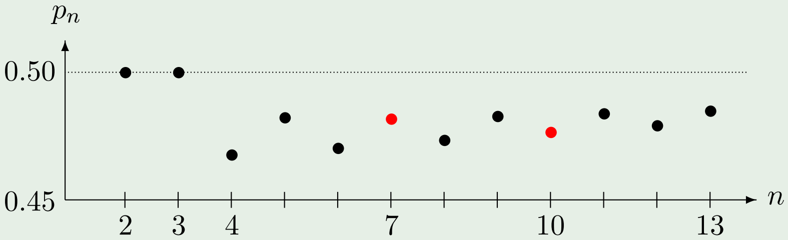
Gráfica de la probabilidades críticas



Teorema

1. $p_n \geq p_4$ para $n \geq 1$

Gráfica de la probabilidades críticas

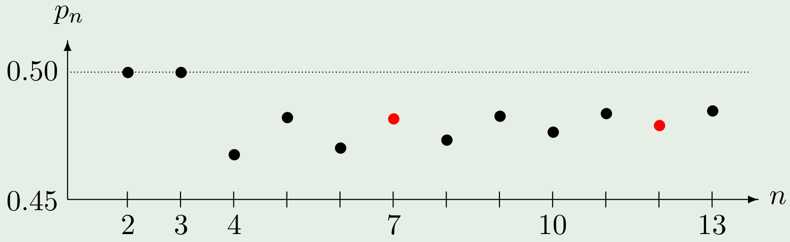


Teorema

1. $p_n \geq p_4$ para $n \geq 1$
2. $p_{2n+4} \leq p_{2n+1}$ para todo $n \geq 0$.

Gráfica

Gráfica de la probabilidades críticas

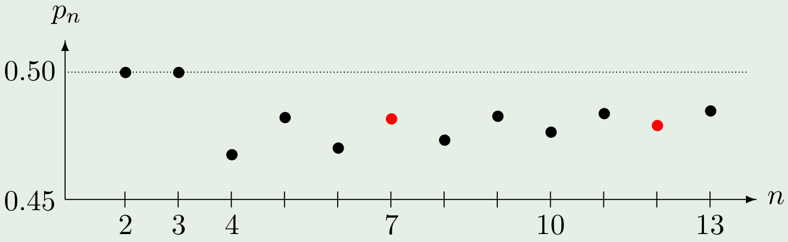


Teorema

1. $p_n \geq p_4$ para $n \geq 1$
2. $p_{2n+4} \leq p_{2n+1}$ para todo $n \geq 0$.
3. $p_{2n+6} \leq p_{2n+1}$ para todo $n \geq 3$.

Gráfica

Gráfica de la probabilidades críticas



Teorema

1. $p_n \geq p_4$ para $n \geq 1$
2. $p_{2n+4} \leq p_{2n+1}$ para todo $n \geq 0$.
3. $p_{2n+6} \leq p_{2n+1}$ para todo $n \geq 3$.

Proyecto

Competencia en una caminata aleatoria.

- Dos corredores de valores: A y B
- Uno gana y el otro pierde
- A tiene la preferencia
- Cual es la estrategia de cada corredor que maximiza su probabilidad de ganar?

Referencias

Allaart, P. C. (2010).
How to stop near the top in a random walk?.
Decision Making Processes under Uncertainty and Ambiguity, RIMS Kokyuroku 1682, 33–40.

Hlynka, M. and Sheahan, J. N. (1988).
The secretary problem for a random walk.
Stoch. Proc. Appl. **28**, 317–325.

Yam, S. C. P., Yung, S. P. and Zhou, W. (2009).
Two rationales behind 'buy-and-hold or sell-at-once'.
J. Appl. Probab. **46**, 651–668.